

# Midtoets Calculus 2

16 maart 2007, 13.15-14.00 uur.

Per opgave zijn maximaal 2 punten te behalen. Totaal: 10 punten.

1. De reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  convergeert indien aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

1. de reeks alterneert, d.w.z.  $a_{n+1}a_n < 0$  voor alle  $n$ ;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;
3.  $|a_{n+1}| \leq |a_n|$  voor alle  $n$ .

Laat aan de hand van tegenvoorbeelden zien dat de voorwaarden 1. en 2. niet gemist kunnen worden. M.a.w. geef (zonder bewijs) een divergente reeks die

- (a) niet aan 1. maar wel aan 2. en 3. voldoet;
- (b) niet aan 2. maar wel aan 1. en 3. voldoet.

2. Voor welke (reële)  $x$  convergeert de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}?$$

3. Bereken de lengte van de kromme

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + \frac{2}{3}t\sqrt{2t}\mathbf{k}$$

met  $0 \leq t \leq 1$ .

4. Toon aan dat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

niet bestaat.

5. Deeltjes vliegen met horizontale snelheid  $u(x, y)$  en verticale snelheid  $v(x, y)$  door de twee-dimensionale ruimte. De deeltjes hebben massa 1. De kinetische energie is constant:

$$(u^2 + v^2)/2 = \text{constant}$$

Toon aan dat  $u\nabla u + v\nabla v = \mathbf{0}$ .